1 Identités remarquables

1.1 Formules

Formule 1	Formule 2	Formule 3
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Trois exemples

1er exemple	2 ième exemple	3 ième exemple
$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 6x + 9\end{aligned}$	$\begin{aligned}(3x-2)^2 &= (3x)^2 - 2\times 3x \times 2 + 2^2 \\ &= 9x^2 - 12x + 4\end{aligned}$	$\begin{aligned}(5x+3)(5x-3) &= (5x)^2 - 3^2 \\ &= 25x^2 - 9\end{aligned}$

Exercices

1. Développer les expressions suivantes :

$a)\ A = (x-3)^2$ $b)\ B = (x+5)^2$ $c)\ C = (x-2)(x+2)$ $d)\ D = (3x+1)^2$ $e)\ E = (2x-5)^2$

$f)\ F = (7x+2)^2$ $g)\ G = (3x-5)(3x+5)$ $h)\ H = (2x+2)^2$ $i)\ I = (5x-2)^2$ $j)\ J = (9x-2)(9x+2)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$a)\ A = x^2 + 2x + 1$ $b)\ B = x^2 - 4x + 4$ $c)\ C = x^2 - 9$ $d)\ D = 25x^2 - 16$ $e)\ E = 25 - 4x^2$

$f)\ F = 16x^2 + 8x + 1$ $g)\ G = 4x^2 - 16x + 4$ $h)\ H = 9x^2 - 25$ $i)\ I = 16x^2 + 40x + 25$ $j)\ J = 9x^2 - 24x + 16$

2 Factorisation

2.1 Il n'y a pas de parenthèses

2.1.1 Le nombre de termes du polynôme est 2

Trois exemples

1er exemple	2 ième exemple	3 ième exemple
$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 + 3x \\ &= x(5x+3)\end{aligned}$	$\begin{aligned}f(x) &= 25x^2 - 16 \\ &= (5x)^2 - 4^2 \\ &= (5x-4)(5x+4)\end{aligned}$	$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 + 3 \\ & \mathit{impossible}\end{aligned}$

Exercices

Factoriser les expressions suivantes :

$a)\ f(x) = 5x^2 + 7x$ $b)\ g(x) = 9x^2 - 36$ $c)\ h(x) = -2x^2 + 8x$ $d)\ i(x) = 7x^2 + 1$ $e)\ j(x) = 25 - 4x^2$

$f)\ k(x) = 5x^2 + 7$ $g)\ l(x) = 9x^2 - 6x$ $h)\ m(x) = 4x^2 - 81$ $i)\ n(x) = x^2 - 1$ $j)\ o(x) = 25x - 16x^2$

2.1.2 Le nombre de termes du polynôme est 3

Trois exemples

1er exemple	2 ième exemple	3 ième exemple
$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 6x + 9 \\ &= (x+3)^2\end{aligned}$	$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 8x + 16 \\ &= (x-4)^2\end{aligned}$	$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 + 50x + 125 \\ &= 5(x^2 + 10x + 25) \\ &= 5(x+5)^2\end{aligned}$

Exercices

Factoriser les expressions suivantes :

$a)\ f(x) = x^2 - 2x + 1$ $b)\ g(x) = x^2 - 6x + 9$ $c)\ h(x) = x^2 + 8x + 16$ $d)\ i(x) = x^2 + 16x + 64$
$e)\ j(x) = x^2 + 4x + 4$ $f)\ k(x) = 5x^2 + 30x + 45$ $g)\ l(x) = 9x^2 - 36x + 36$ $h)\ m(x) = 4x^2 - 8x + 4$
$i)\ n(x) = 2x^2 - 28x + 98$ $j)\ o(x) = 8x - x^2 - 16$

2.2 Il y a des parenthèses

2.2.1 Il y a un facteur commun

Trois exemples

1er exemple	2 ième exemple	3 ième exemple
$f(x) = \underline{(x+3)}(x+5) - (2x+1)\underline{(x+3)}$	$f(x) = (x+3)^2 + (2x+1)(x+3)$	$f(x) = (x+3) - (2x+1)(x+3)$
$= (x+3)\left[(x+5) - (2x+1)\right]$	$= (x+3)\left[(x+3) + (2x+1)\right]$	$= (x+3)\left[1 - (2x+1)\right]$
$= (x+3)(x+5-2x-1)$	$= (x+3)(x+5+2x+1)$	$= (x+3)(1-2x-1)$
$= (x+3)(-x+4)$	$= (x+3)(3x+6)$	$= -2x(x+3)$

Exercices

Factoriser les expressions suivantes :

a) $f(x) = (x+5)(2x+1) - (x+5)(x+2)$ *b)* $g(x) = (x+5) - (x+5)(x+2)$ *c)* $h(x) = (x+5)^2 - (x+5)(x+2)$
d) $i(x) = (x+2) + (2x-5)(x+2)$ *e)* $j(x) = (x+2)^2 - (2x-5)(x+2)$ *f)* $k(x) = 2(5x+7) + (x+1)(5x+7)$
g) $l(x) = (x-6)(x+1) + (x-6)^2$ *h)* $m(x) = 2(x-1)^2 + (x-1)(x+3)$ *i)* $n(x) = (3x+1)^2 - 2(3x+1)$

2.2.2 On fait apparaître un facteur commun

Trois exemples

1er exemple	2 ième exemple	3 ième exemple
$x^2 + 3x - (2x+1)(x+3)$	$x^2 + 6x + 9 + (2x+1)(x+3)$	$x^2 - 9 - (2x+1)(x+3)$
$= x(x+3) - (2x+1)(x+3)$	$= (x+3)^2 + (2x+1)(x+3)$	$= (x+3)(x-3) - (2x+1)(x+3)$
$= (x+3)\left[x - (2x+1)\right]$	$= (x+3)\left[(x+3) + (2x+1)\right]$	$= (x+3)\left[(x-3) - (2x+1)\right]$
$= (x+3)(x-2x-1)$	$= (x+3)(x+5+2x+1)$	$= (x+3)(x-3-2x-1)$
$= (x+3)(-x-1)$	$= (x+3)(3x+6)$	$= (x+3)(-x-4)$

Exercices

Factoriser les expressions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 5x - (x+5)(x+2)$ *b)* $g(x) = x^2 + 10x + 25 - (x+5)(x+2)$ *c)* $h(x) = x^2 - 25 - (x+5)(x+2)$
d) $i(x) = x^2 - 4 + (2x-5)(x+2)$ *e)* $j(x) = x^2 + 4x + 4 - (2x-5)(x+2)$ *f)* $k(x) = 2(5x+7) + 25x^2 + 70x + 49$
g) $l(x) = x^2 - 12x + 36 - (x+1)(x-6)$ *h)* $m(x) = x^2 - 9 + (x-1)(x+3)$ *i)* $n(x) = 9x^2 + 6x + 1 - 2(3x+1)$

2.2.3 Il n'y a pas de facteur commun

Trois exemples

1er exemple	2 ième exemple	3 ième exemple
		$x^2 + 4x - 5$
$(x+3)^2 - 25$		$= (x^2 + 4x + 4) - 4 - 5$
$= (x+3)^2 - 5^2$	$(x+3)^2 - (2x+1)^2$	$= (x+2)^2 - 9$
$= \left[(x+3)+5\right]\left[(x+3)-5\right]$	$= \left[(x+3)+(2x+1)\right]\left[(x+3)-(2x+1)\right]$	$= (x+2)^2 - 3^2$
$= \left[x+3+5\right]\left[x+3-5\right]$	$= \left[x+3+2x+1\right]\left[x+3-2x-1\right]$	$= \left[(x+2)+3\right]\left[(x+2)-3\right]$
$= (x+8)(x-2)$	$= (3x+4)(-x+2)$	$= \left[x+2+3\right]\left[x+2-3\right]$
		$= (x+5)(x-1)$

Exercices

Factoriser les expressions suivantes :

a) $f(x) = (x+1)^2 - 4$ *b)* $g(x) = 9 - (x+1)^2$ *c)* $h(x) = (x+3)^2 - (x+2)^2$
d) $i(x) = (3x+2)^2 - (2x+1)^2$ *e)* $j(x) = 4(x+1)^2 - 25$ *f)* $k(x) = 25(5x+7)^2 - (x+2)^2$
g) $l(x) = x^2 - 6x + 5$ *h)* $m(x) = x^2 - 8x - 9$ *i)* $n(x) = 2x^2 - 16x + 14$

3 Équations $\mathbb{R}$

3.1 Équations simples

Quatre exemples

1er exemple	**2 ième exemple**	**3 ième exemple**	**4 ième exemple**
$x-4=2$ $x=2+4$ $x=6$	$-3x=7$ $x=\dfrac{7}{-3}$ $x=-\dfrac{7}{3}$	$3x+1=5x-4$ $3x-5x=-4-1$ $-2x=-5$ $x=\dfrac{-5}{-2}$ $x=\dfrac{5}{2}$	$x^2=3$ $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

Exercices

Résoudre les équations suivantes :

1. *a*) $x+3=0$ *b*) $x-5=0$ *c*) $3x=6$ *d*) $x^2=4$
2. *a*) $2x=5$ *b*) $3x=-7$ *c*) $-3x=-5$ *d*) $x^2-5=0$
3. *a*) $2x+1=5$ *b*) $3x-5=-7$ *c*) $-3x+1=-5$ *d*) $x^2-8=1$
4. *a*) $2x+1-x+4=5$ *b*) $3x-5+3x-7=2x+4$ *c*) $-3x+1+2(x-4)=x-5$ *d*) $3x^2=6$
5. *a*) $2x+1=2x-5$ *b*) $3x-5+3x-7=6x-12$ *c*) $2x-1+3(2x-3)=8x-8$ *d*) $x^2+5=0$
6. *a*) $2x=\dfrac{1}{3}$ *b*) $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$ *c*) $\dfrac{x}{2}=5$ *d*) $\dfrac{2}{3}x=\dfrac{1}{5}$
7. *a*) $\dfrac{x-2}{3}=0$ *b*) $\dfrac{3x+1}{3}=5$ *c*) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{4}{5}$ *d*) $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{2x+1}{4}$

3.2 Équations produit

Deux exemples

1er exemple	**2 ième exemple**
$x(x-5)=0$ $x=0$ ou $x-5=0$ $x=0$ ou $x=5$	$(x-3)(x+2)=0$ $x-3=0$ ou $x+2=0$ $x=3$ ou $x=-2$

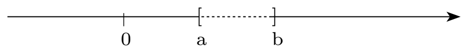
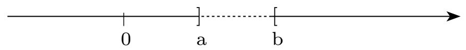
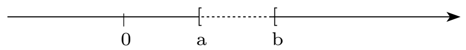
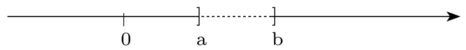
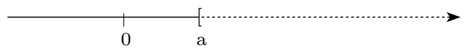
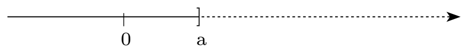
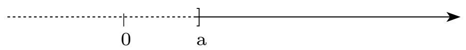
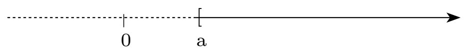
Exercices

Résoudre les équations suivantes :

1. *a*) $x(x+1)=0$ *b*) $x(x+5)=0$ *c*) $x(x-2)=0$
2. *a*) $x(2x-5)=0$ *b*) $3x(2x+3)=0$ *c*) $-3x(x+1)=0$
3. *a*) $(x+1)(x-1)=0$ *b*) $(x-5)(x+7)=0$ *c*) $(-x+1)(x+1)=0$
4. *a*) $(2x+1)(x+4)=0$ *b*) $(3x-5)(3x-7)=0$ *c*) $(-3x+1)(2x-4)=0$

4 Inéquations

4.1 Intervalles

Intervalle	Ensemble des réels x	Représentation graphique
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty;a]$	$x \leq a$	
$]-\infty;a[$	$x < a$	

4.2 Inéquations simples

Exercice 1

Représenter les inéquations suivantes à l'aide d'un intervalle :

1. $a)\ -2 \leq x \leq 2 \quad b)\ -5 < x < 2 \quad c)\ -20 \leq x < -10 \quad d)\ -12 < x \leq 8$
2. $a)\ x \leq 2 \quad b)\ x \geq -3 \quad c)\ x < -10 \quad d)\ x > 8$
3. $a)\ x^2 \leq 25 \quad b)\ x^2 \geq 25 \quad c)\ x^2 < 2 \quad d)\ x^2 > 2$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

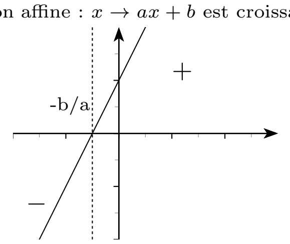
1. $a)\ x+5 \leq 0 \quad b)\ 3x > 6 \quad c)\ x-2 < 0 \quad d)\ -5x \geq 10$
2. $a)\ 2x-5 \geq 1 \quad b)\ -2x+1 < 5 \quad c)\ 3x+1 \leq 1 \quad d)\ x+7 > 2x$
3. $a)\ 5x-1 \geq 4x+5 \quad b)\ -x+2 < -3x+4 \quad c)\ -3x+1 \leq 5x+8 \quad d)\ 2x+7 > -2x+1$

4.3 Inéquations produits

4.3.1 Signe de $ax+b$

$*$ Si $a > 0$ alors

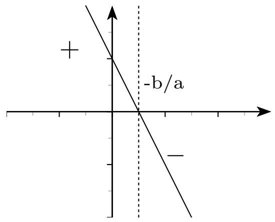
La fonction affine : $x \to ax+b$ est croissante sur $\mathbb{R}$



x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

∗ Si $a < 0$ alors

La fonction affine : $x \to ax + b$ est décroissante sur $\mathbb{R}$



x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Exercices

Pour chaque question

1. Compléter par les signes + ou – et ajouter le 0 manquant.
2. Écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée.

x	$-\infty$	$2/5$	$+\infty$
$5x-2$			

$5x - 2 \leqslant 0$

$S =$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$			

$-x - 1 > 0$

$S =$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-\frac{x}{2}+2$			

$-\frac{x}{2} + 2 < 0$

$S =$

x	$-\infty$		$+\infty$
$-5x-3$			

$-5x - 3 \geq 0$

$S =$

x	$-\infty$		$+\infty$
$4x-5$			

$4x - 5 < 0$

$S =$

x	$-\infty$		$+\infty$
$-\frac{3x}{2}-2$			

$-\frac{3x}{2} - 2 > 0$

$S =$

4.3.2 Signe d'un produit

Exemple : étudier le signe de $P(x) = (2x+1)(-x+2)$

— On étudie le signe de chaque facteur :

$$\begin{array}{r|c} 2x+1=0 & -x+2=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} & x=2 \end{array}$$

— On place ces informations dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

— Par exemple, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+1)(-x+2) < 0$ est $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[$

— Remarque : dans certains cas, il est inutile de faire un tableau de signes.
Par exemple, considérons l'inéquation :$(x^2+4)(x-3) \leqslant 0$
On constate ici que le premier facteur x^2+4 est toujours positif, l'inéquation est donc équivalente à :$x-3 \leqslant 0$, d'où $S =]-\infty; 3]$

Exercices

Exercice 1

Pour chaque question

1. Compléter par les signes + ou – et ajouter le 0 manquant.

2. Ecrire l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée.

x	$-\infty$ $3/8$ 5 $+\infty$		
$5-x$			
$3-8x$			
$(5-x)(3-8x)$			

$(5-x)(3-8x) \leqslant 0$

$S =$

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$		
$5x+5$			
$3x-6$			
$(5x+5)(3x-6)$			

$(5x+5)(3x-6) > 0$

$S =$

x	$-\infty$ -2 $-1/3$ $+\infty$		
$-3x-1$			
$-2x-4$			
$(-3x-1)(-2x-4)$			

$(-3x-1)(-2x-4) < 0$

$S =$

---

x	$-\infty$ $-4/5$ 2 $+\infty$		
$2-x$			
$4+5x$			
$(2-x)(4+5x)$			

$(2-x)(4+5x) \leqslant 0$

$S =$

x	$-\infty$ $+\infty$		
$-3x+2$			
$x-6$			
$(-3x+2)(x-6)$			

$(-3x+2)(x-6) > 0$

$S =$

x	$-\infty$ $+\infty$		
$-2x-1$			
$-2x+4$			
$(-2x-1)(-2x+4)$			

$(-2x-1)(-2x+4) < 0$

$S =$

Exercice 2

Résoudre chacune des inéquations suivantes en utilisant un tableau de signes :
$a)\quad (x-4)(3-x) \leq 0 \quad b)\quad (-2x+3)(5+x) > 0 \quad c)\quad 3x(3x-5) < 0 \quad d)\quad -x^2(2x-1) \geq 0$

Exercice 3

1. Dans cette question on veut résoudre l'inéquation $x^2 + 5x \leq 0$
   (a) Factoriser l'expression $x^2 + 5x$
   (b) En utilisant la factorisation précédente résoudre l'inéquation proposée.
2. Résoudre de même les inéquations suivantes :

$$a)\quad x^2 + 10x \leq 0 \quad b)\quad x^2 - 16 \geq 0 \quad c)\quad (x-5)(2x+1) + (x-5)(x+2) \leq 0$$

4.3.3 Signe d'un quotient

Exemple : résoudre l'inéquation : $\dfrac{3-x}{2x-1} \leqslant 0$

— Contraintes : $2x-1=0, \quad x = \dfrac{1}{2}$. Donc on doit avoir $x \neq \dfrac{1}{2}$.
— Le numérateur : $3-x=0, \quad x=3$

x	$-\infty$	$1/2$		3	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(3-x)/(2x-1)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

— Conclusion $S = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[\cup [3; +\infty[$

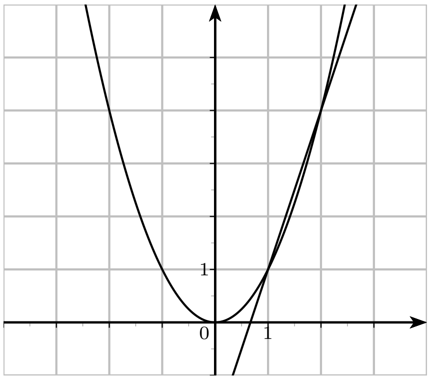
Exercices

Exercice 1

1. Résoudre chacune des inéquations suivantes :
   a) $\dfrac{x+3}{2x-1} \leq 0$ *b)* $\dfrac{2-x}{-5-2x} > 0$ *c)* $\dfrac{3x-1}{-x+5} \leq 0$
2. Dans cette question on veut résoudre $\dfrac{x+4}{5-x} \geq 2$
   (a) Montrer que $\dfrac{x+4}{5-x} - 2 \geq 0$ équivaut à $\dfrac{x+4-2(5-x)}{5-x} \geq 0$
   (b) Simplifier puis résoudre l'inéquation quotient.
3. Résoudre de même les inéquations suivantes :

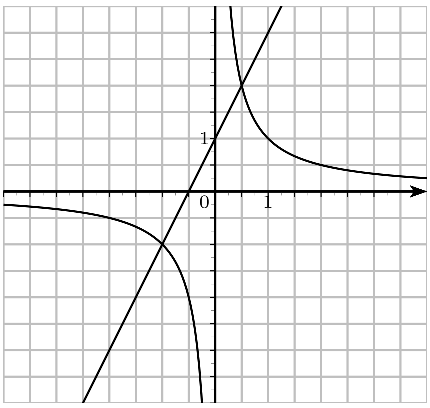
   a) $\dfrac{x+2}{x-3} \geq 2$ *b)* $\dfrac{-5}{2x+1} \geq 1$

Exercice 2



Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x - 2$.
On a représenté ci-contre les fonctions f et g.
1. Résoudre graphiquement $x^2 - 3x + 2 > 0$
2. Vérifier que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$
3. Retrouver le résultat du 2) par le calcul.

Exercice 3



Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 2x + 1$.
On a représenté ci-contre les fonctions f et g.
1. Résoudre graphiquement $\dfrac{1}{x} \leq 2x + 1$
2. Vérifier que $-2x^2 - x + 1 = (x+1)(-2x+1)$
3. Retrouver le résultat du 2) par le calcul.